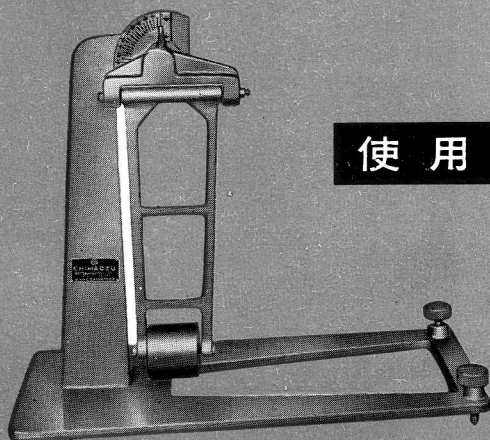
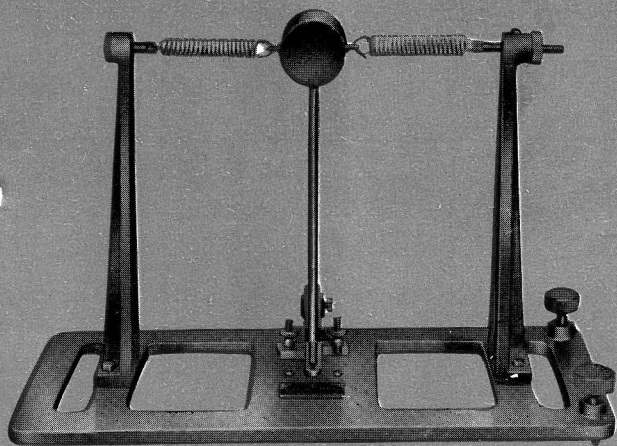


水平振子



使用説明書



倒立振子

水平振子・倒立振子

使用説明書

単振子で地震動を記録させる場合、地震波には周期の短いものから長いものまで色々あつて都合が悪い。地震計に用いる振子は、固有振動の周期を大きくする必要がある。比較的小型で条件を満足させることのできる水平振子が一般に採用されている。

本器水平振子は、その原理を理解させる説明用のものである。

地震計に採用されている他の振子に倒立振子がある。それは主として短周期、小振幅の変位を精密に測る地震計として用いられている。

またこの倒立振子は固有振動の周期を逆に小さくすることができるので、地震波の加速度すなわち衝激の程度を測るための加速度地震計としても利用されている。

本器倒立振子はこの倒立振子の原理を理解させるためのものである。

地震動の観測と地震計

地震の場合には地上のあらゆるものが動いてしまうから、土地の運動の模様を知ることができない。そこで振子についてみると、それも地震動につれて動くが、その慣性のため地面と異なる運動をするから、これに記録ペンをつけ地面と共に動く記録器にそれらの相対運動を画かせば、その記録と、すでに知られている振子の運動特性とから、土地の実際の運動を知ることができる。一般に用いられ

ている地震計はこの原理にもとづくものである。

地震計には地震動の変位、速度および加速度を、またそれらの上下、および水平成分を測るものであるが、普通に地震計といえば変位観測用のものをいつている。変位地震計は振子と記録器とから構成されているが、この振子の理論は単振子のそれに帰結することができる。

単振子地震計の理論

長さ l_1 、錘の質量 m である単振子が、地面に固定された点 A に吊

れている。いま地面が急激に小変位 $x = \overline{AA'}$ 移動したとすれば、錘

m は慣性のため瞬時元の位置に止まり、それにつけられた記録ペンの先端 B は B'' に移動する。ところが、記録円筒 D も $x=BB'$ 移動するから記録ペン $\overline{B'B''}=a$ だけ記録面に画くことになる。

そこで

$$\overline{Am} = l_1, \quad \overline{AB} = j \text{ とすれば}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{j}{l}, \quad a = \frac{j}{l}x = Vx \quad (1)$$

すなわち地面の動き x に対して

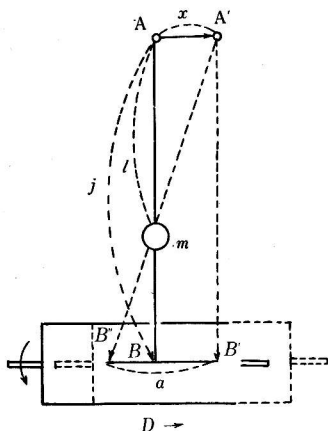
$$\frac{j}{l} = V \text{ 倍されて記録される。}$$

この V は基本倍率とよばれている。

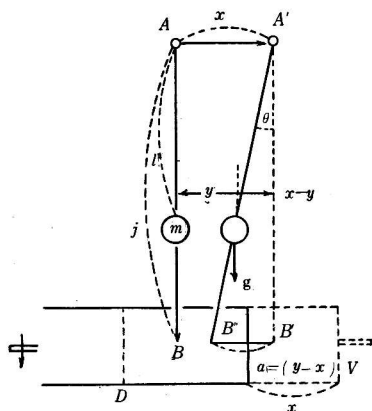
さて錘 m が地面の動きにかかわらず元の位置に止まっていることから m 点が不動点になるといわれたわけであるが、ここで注意すべきことは、

急激な移動 x の意味である。これをいいかえると振子の固有周期にくらべて極めて短い時間に小変位 x だけ動いたということである。かような場合にはいま述べたように錘 m は一時的に不動の姿勢をとるが実際に起る地震についてはこのような都合のよいことばかりはない。そこで次にもう少し一般的のことを調べてみよう。

地震のため吊点 A が第 2 図に示すように右方へ移動した場合、錘



第 1 図



第 2 図

m はその瞬間不動の状態にあるが暫時にして A 点が A' 点(x)に至る時分には m も右方に y だけ変位するものと考えられる。この変位は m に作用する重力 g の分力によるもので、 y だけ変位したときその力の大きさは、

$$\frac{x-y}{l} gm$$

であるから、 m の運動方程式は

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{x-y}{l} gm$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{x-y}{l} g \quad (2)$$

となる。このとき記録円筒 D もまた x だけ右方に動いているわけであるから、記録は $y-x$ 動いたようにかかる。この長さを a

とすると $a = (y-x) V$

$$Vy = a + Vx$$

$$V \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 a}{dt^2} + V \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3)$$

故に(2)(3)式から

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{g}{l} a = -V \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (4)$$

この式の左辺の第2項の係数 g/l を n^2 とおき変形すると

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + n^2 a = -V \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (5)$$

となり一般地震計の理論に用いられる形となる。

地震動が正弦運動で、記録 a が

$$a = A \cos pt \quad (6)$$

である場合を考えると(5)式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{A(p^2 - n^2) \cos pt}{V} \\ &= (p^2 - n^2) \frac{a}{V} \end{aligned} \quad (7)$$

これを二回積分すると

$$x = -\left(1 - \frac{n^2}{p^2}\right) \frac{a}{V} + Bt + C \quad (8)$$

ここに B, C は積分常数で C は $t=0$ のときの x の値、 Bt は時間とともに地面が一定速度で動くことを示すものであるが、これらは地震動とは無関係であるから省略すると、

$$x = \left(\frac{n^2}{p^2} - 1\right) \frac{a}{V} \quad (9)$$

となる。この式から判るように実際の地動、 x の値は記録 a に、 $(n^2/p^2 - 1)/V$ をかけたものである。

次に地震が起らないときは $x=0$ であるから(5)式の右辺を0とおいて

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + n^2 a = 0 \quad (10)$$

この式の解は

$$a = K \cos(t + \pi) \quad (11)$$

この式の K と τ とは他の条件によつて定まるものであるが、この式の示すものは一定の周期 T_0 をもつ正弦運動である。 T_0 と n と

の関係は

$$T_0 = \frac{2\pi}{n} \quad (12)$$

である。また(6)式についても同様に周期 T と p との関係は

$$T = \frac{2\pi}{p} \quad (13)$$

であるから、これらの関係を(9)式に入れて書きかえると

$$x = \left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right) \frac{a}{V} \quad (14)$$

$$\text{あるいは } a = \frac{V}{\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right)} x \quad (15)$$

V および T_0 の値は地震計によって定まるものであるが、 T の値は種々の値をとるのが実際である。

従つて x と a とは一定の関係をもたない。換言すれば、地震の変位 x とその記録 a との関係は地震動の周期に依存するということである。

この $*1/\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right)$ を倍率

係数、 $V/\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right)$ を振動倍率と

名づけている。*実際の地震計には T/T_0 のできるだけ広い範囲に

わたつて倍率を一定にしたいことと、振子の共鳴現象を防ぐために振子の運動速度に比例する抵抗力を与える装置(制振器)が施されており、その効果を含めた式で倍率係数および振動倍率が定義されているが、ここでは省略する。

$$T/T_0 \text{ と } 1/\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right)$$

との関係を図示すると第3図のようになる。この図から直ちに判るとおり地震動の周期 T の値の如何にかかわらず、倍率係数の値を1にすること、いいかえれば記録 a が地動 x の V 倍である関係を維持させるためには、 T/T_0 の値が小さくなければならない。しかるに T の値は種々変化するものであるから、その最大値を予想して T_0 の値を定める必要がある。地震動の周期 T は大体0.1秒位から数10秒の範囲であるからそれを考慮に入れ、振子の固有周期 T_0 を定めなければならない。

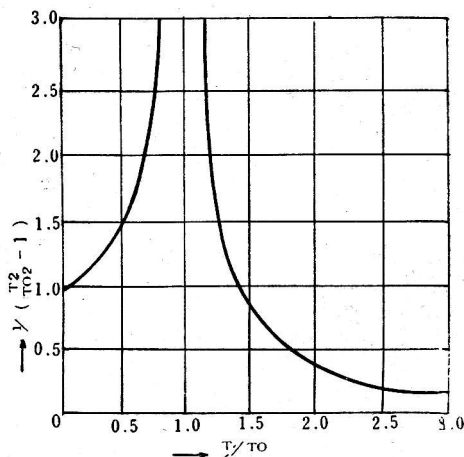
水平振子

原理

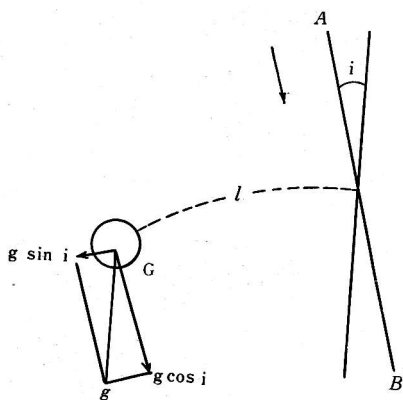
振子の固有周期を大きくする必要のあることは前に述べたとおりであるが、これを垂直振子で行うとすると、振子の長さ l の値が非常に大きくなり実用にならない。そこで考えられるのが水平振子の採用である。

振子の回転軸が垂直振子の場合のように水平でなく傾いている場合の振動について調べてみる。第4図に示すように実体振子 OG の回転軸を AB としこれが鉛直線とのなす角を i とする。錘に働く重力 g を回転軸に垂直な分力 $g \sin i$ と平行な分力 $g \cos i$ とに分解する。 $g \cos i$ は軸の上下端に働いている力と釣合っているだけで振子の運動に関係がなく、振子の振動を起すのは $g \sin i$ だけである。

いまこの振子を上から(図の矢の方向)回転軸に平行にながめてみるとちょうど第2図の垂直振子と同じように、違うのは g の代りにその分力 $g \sin i$ が働いていることだけであ



第 3 図



第 4 図

る。それであるから図面に垂直な方向に移動が起ると第2図の場合と同じような運動をする。

ところでその固有周期 T_0 は

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin i}} \quad (16)$$

で表わされるから、理論的には i を小さくすればいくらでも大きくなる。

$$i = 0 \quad \sin i = 0 \quad T_0 = \infty$$

回転軸を水平にすれば第2図と同様の状態になり

$$i = 90^\circ \quad \sin i = 1$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (17)$$

となることはいうまでもない。

使 用 法

- (1) 本器の振子の長さ（支点から振子の中心までの距離）は約25 cm で垂直に振らしたときの周期は約1秒である。まず垂直振子（振子の回転軸は水平で振子を垂直にする）としてその周期を測つてみる。

- (2) 振子の止めねじを緩め、振子の回転軸を持ち、振子の回転軸を水平より傾むけ、振子を斜めにして振らしてみる。周期を測つてみる。

注意 振子の回転軸を傾むける場合振子を持つて無理

に傾むけてはいけない。

必ず回転軸を持つて行うこと。

- (3) 更に振子の回転軸を水平にして振子を振らしてみる。振子の周期は非常に大きくなるから、振れなくなる。（このとき台のねじで台を水平に調整する）

振子の周期は垂直振子より水平振子にすると長くなることがよく解る。垂直振子で周期を長くするためには振子の長さを非常に大きくし、実用にならないことを理解させる。

倒立振り子 原理

倒立振り子はまた逆立振り子ともよばれ、その名の示すように垂直振り子を逆立ちにし、下端で支えて倒れないようにバネで釣合させたものである。

この振り子はバネの強さを適当にすることにより、固有周期を垂直振り子の場合より大きくすることも小さくすることもできる。

錘に働く重力による力の能率

$$mgh \sin \theta = mgh\theta$$

板バネの曲げによる応力の能率

$$-\varepsilon\theta$$

(ε は弾性にかかわる比例常数)

であるから運動の方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\varepsilon + mgh\theta$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + (\varepsilon - mgh)\theta = 0 \quad (1)$$

この式の両辺を I で除すと

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\varepsilon - mgh}{I} \right) \theta = 0 \quad (2)$$

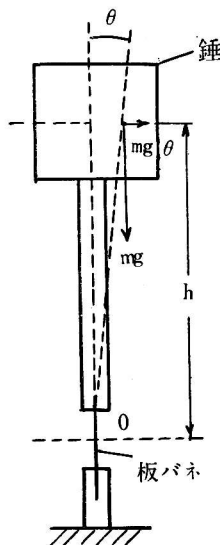
であるから、ここで $\varepsilon - mgh/I = n^2$

とおき(2)式を変形して

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = 0 \quad (3)$$

とすれば水平振り子の説明の場合における(13)式と同じ形となる。

第1図に示すものは現在多くの地震計に採用されている形式のもので、錘の質量を m 、回転軸 O の周りの慣性モーメントを I 、回転軸と錘の重心との距離を h 、重力の加速度を g として図に示すように、平衡の位置から極めて小さく角 θ だけ傾いた場合を考えると、



第 1 図

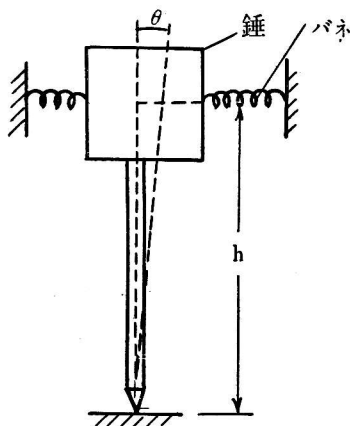
従つて、固有周期 T_0 は

$$T_0 = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\varepsilon - mgh}} \quad (4)$$

で表わされる。この式において、 I, m, g, h をいずれも常数とすれば T_0 の値は、 ε の値を mgh に近づけば近づくほど大きくなり、また反対に ε を mgh に比して大きくすれば小さくなる。

第2図のような形式の倒立振子も地震計に採用されている。これは第1図のものにくらべて端にある板バネに代る。上部のヘリカルスプリングになつただけで他に変りはない。

この場合の固有周期の算出にヘリ



第 2 図

カルスプリングの比例常数を ε とすれば(4)式から求められる。

使 用 法

本器の振子の長さは約25 cm であるから垂直振子をして使用する場合は（前の水平振子と同様）その周期は約1秒である。

I. つる巻きばねで支えた場合

- (1) 振子を台の中央の支点に倒立し、つる巻きばねで両方から支える。倒立振子が垂直の位置に固定できるように一端のねじで調整する。

注意 一端のねじを強く締めても弱く止めても振子の周期が変わらないから無理に使用しないこと。

- (2) 倒立振子をつる巻きばねの方向に変位させて振動させてみる。その周期はどうか。

II. 板ばねで支えた場合

- (1) 振子を板ばねの止め孔に差し込む。台の水平を調整ねじで加減し振子を垂直に支える。
- (2) 軽く振らせてその周期はどうか調べてみる。

III. 倒立振子の地震計への応用

この振子の理論は水平振子の場合と同様に単振子についての考えと同様であるが、水平振子の場合には振子に作用する復元力は重力

によるもののみであるが、この場合にはバネの変形にもとづくものが関与する。(水平振子にも回転軸に板バネを用いたものがあるが、これは回転軸における摩擦抵抗を小さくする目的であつて復元力はできるだけ小さいように構成されている) このバネの変形が大きいと比例常数 ϵ の値が変わるおそれがあり、また破損する憂いもあるので変位 x の比較的小さい地震を測る地震計に採用されている。 x の大きいものの地震計には水平振子が採用される。また小形の地震計については、この振子は水平振子より構造が簡単で安定性もよいので、携帯用地震計にはこ

れが主として採用されている。しかし固有周期は水平振子に比べて大きくすることが困難である。従つて短周期、小振幅用の地震計に應用されている。

つぎにこの振子は前に述べたように固有周期はバネの比例常数 ϵ の値を大きくすることにより、いかにすればバネの強さを大きくすることにより垂直振子の場合より小さくすることができる。振子の固有周期が地震動の周期より相当程度小さいときは、その記録は地震動の加速度に比例するものであることが理論的に説明できるが、実際にもこの考えによつて加速度地震計がつくられている。



株 式 会 社 島 津 製 作 所

本 社 京都市中京区河原町二条南 電 ③ 6880

東 京 支 店	東京都千代田区神田美土代町2	電 ② 2281
大 阪 支 店	大阪市西区阿波堀通1ノ53	電 ⑥ 6431
福 岡 支 店	福岡市上小山町47ノ1	電 ③ 331
名古屋支店	名古屋市中区西宮原町3ノ1	電 ② 7191
広島営業所	広島市袋町6 富国生命館内	電 ② 3440
札幌営業所	札幌市南一条西5ノ3	電 ③ 4620